

Les matrices de transfert dans la résolution des poutres continues.

Préambule

1 Historique :

En tant qu'étudiant (il y a fort longtemps dans le début des années 1980), lors de la réalisation de projets j'ai transpiré sur des calculs de systèmes de poutre. Ensuite, en tant que professeur d'enseignement technique notamment en BTS MAI (maintenant CRSA) j'ai fait transpirer des élèves sur ces mêmes problèmes.

Si ce n'est une question de beauté du calcul (discutable), le but de ces calculs barbares était de dimensionner des structures pour qu'elles conviennent à l'emploi auquel elles étaient destinées et non de ne pas se tromper sur un signe, une simplification Le besoin de cibler les objectifs réels a conduit à la création d'un programme de calcul devant satisfaire aux critères suivants :

- Simplicité d'entrée sorties (les cartes perforées n'étaient pas vraiment loin !).
- ne nécessitant pas de gros centres de calcul avec un CRAY one (l'IBM PC avec un processeur 8286 à 8Mhz, et 512 Ko de mémoire Md Dos V2.1 était la norme la plus haute de l'ordinateur personnel et faisait rêver !)
- permettant de modifier facilement tel ou tel paramètre
- de se concentrer sur l'essentiel et d'éviter les réactions du type « on en rajoute un peu et cela va bien tenir ! »
- Réalisé en utilisant un langage et un compilateur bon marché adapté.

Avec le contraintes du matériel standard de l'époque : MsDos V2.1, un processeur 8086 (voire un 8087 en sus) 512 Ko de mémoire un écran 320x240 16 couleurs ou au mieux 720x348 monochrome, un compilateur TurboPascal V2.0 deux unités de disquettes 360Ko et une bonne dose de travail, le programme « poutre » a résolu une partie des problèmes énoncés ci-dessus.

Le temps a fait son œuvre, tant dans l'aspect technique que dans l'obsolescence des capacités de calcul des élèves... Devant les solutions commerciales compliquées et onéreuses pour résoudre ces problèmes qualifiés de simple, l'incompatibilité entre les vieux programme et nos systèmes actuels (merci « Dosbox »), l'appétit de nos concitoyens pour les interfaces graphiques (désormais presque standardisées sauf chez « Microsoft » bien entendu), le « tout de suite » désormais exigé par les élèves et les autres, et surtout le temps que j'ai de disponible par l'état de retraité qui est désormais le mien, m'a conduit à reprendre le problème et à vous proposer une nouvelle mouture plus dans l'air du temps.

2 Le programme Poutre

Le programme Poutre qui fait l'objet de l'application de cette théorie permet de résoudre numériquement (si cela est possible) des systèmes de poutres très complexes dont la résolution manuelle conduirait à une perte capillaire certaine.

Ce programme est en fait une version moderne, de l'ancêtre sous MS Dos (dont j'ai malheureusement perdu les sources) écrit fin des années 80. Ce nouveau programme conserve de son ancêtre une possibilité de description du problème en fichier texte à partir d'un langage simplifié à balises, ainsi que la possibilité d'obtenir des rapports (désormais en fichier .pdf) du résultat de calcul. Il est doté contrairement à son ancêtre d'une Interface Homme Machine qui j'espère survivra au moins quelques années avant de basculer dans l'obsolescence temporelle accélérée de notre civilisation (snif..).

Cordier Yves	Les matrices de transfert dans la résolution des poutres continues.	P 1/ 20
--------------	---	---------

3 Aperçus rapide de la méthode des matrices de transfert :

De nos jours lorsque l'on parle calcul numérique de structure, on sous entend (souvent sans vraiment comprendre de quoi il s'agit) de calcul par élément fini.

Cette dernière méthode dont le principe est de découper un problème en petit sous éléments que l'on approxime soit par des répartition constantes de charge ou contrainte ou mieux par des répartitions linéaire de ces mêmes valeurs entre des nœuds de calcul, donne lieu à des résultats approximatifs (Le calcul est faux par nature !). Si le maillage effectué est suffisamment fin ou que les variations des valeurs calculées sont lentes au regard des tailles du découpage du problème, cette méthode couteuse en temps calcul et mémoire produit des résultats acceptables.

Un maillage plus fin conduit à une plus grande multiplicité de calcul et donc à une propagation d'erreurs numérique accrue.

Un maillage grossier conduit à une plus grande précision numérique mais est entaché à la base par une erreur de principe.

Que choisir ? En tout état de cause, comme dans tout calcul numérique, des divergences de calcul peuvent apparaître et seul l'expertise de l' *homme de l'art* permet de valider ou d'invalider ce qu'a produit le cerveau électronique avec ou sans I.A. en confrontant les aléations du programme à une réalité tangible.

I Principe de calcul des matrices :

La détermination des matrices passe par une étude statique d'un élément de poutre soumis à des

$$\begin{array}{ccc} -\{\tau_{\text{int}}\}_1 & \rightarrow & \boxed{\begin{array}{c} \text{élément de} \\ \text{poutre} \end{array}} & \leftarrow & \{\tau_{\text{int}}\}_2 \\ \text{charges extérieures.} & & \uparrow & & . \text{ On rappelle ici que } \{\tau_{\text{int}}\}_n \text{ représente la} \\ & & \{F_{\text{ext} \rightarrow \text{poutre}}\} & & \end{array}$$

réduction « torsorielle » de l'ensemble des actions situées à droites de la section d'indice n considérée

$$\{\tau_{\text{int}}\}_n = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_n} \\ \overrightarrow{M_n} \end{Bmatrix}. \text{ Avec } \overrightarrow{F_n} \text{ la résultante des actions mécaniques } \overrightarrow{M_n} \text{ le moment de cette résultante au}$$

point d'indice n. avec la relation de calcul $\overrightarrow{M_p} = \overrightarrow{M_q} + \overrightarrow{F_q} \wedge \overrightarrow{QP}$

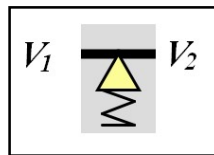
Le principe fondamental de la statique appliqué à l'élément de poutre conduit à l'équation de torseurs :

$$-\{\tau_{\text{int}}\}_1 + \{\tau_{\text{int}}\}_2 + \{F_{\text{ext} \rightarrow \text{poutre}}\} = \{O\} \text{ avec } \{\tau_{\text{int}}\}_n \text{ le torseur des actions de cohésion dans la poutre au point n. La traduction matricielle de ces équations, fourni ce que l'on appellera la matrice de transfert de l'élément.}$$

Les matrices des points singuliers seront déterminées en considérant un élément de poutre de longueur infinitésimal (dx) autour de la singularité. Pour les éléments de poutre, une étude globale de l'élément permettra de déterminer la matrice de transfert de l'élément.

En tout point de la poutre, nous associons un vecteur de caractéristiques $\mathbf{V}_n = \begin{bmatrix} y_n \\ \theta_n \\ M_n \\ T_n \\ 1 \end{bmatrix}$ avec

$\begin{cases} y : \text{fleche} \\ \theta : \text{rotation de section} \\ M : \text{moment flechissant} \\ T : \text{effort tranchant} \\ 1 : \text{coefficient de coordonnées homogènes} \end{cases}$.



Avant et près la liaison ou l'action extérieure sur la poutre, nous pouvons déterminer un vecteur des caractéristiques de la poutre : de gauche à droite $\mathbf{V}_1$ avant la perturbation :

$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ T_1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{V}_2$ après : $\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \\ M_2 \\ T_2 \\ 1 \end{bmatrix}$ avec $\begin{cases} y : \text{fleche} \\ \theta : \text{rotation de section} \\ M : \text{moment flechissant} \\ T : \text{effort tranchant} \\ 1 : \text{coefficient de coordonnées homogènes} \end{cases}$.

L'étude de l'équilibre de l'élément entre ces deux sections (distantes de dx) nous fournit les équations que nous traduisons dans la matrice sous la forme $\mathbf{V}_2 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}_1$

On peut s'étonner du coefficient 1 en fin de vecteur. Ce coefficient est en fait une astuce mathématique des coordonnées homogènes qui permet par une simple multiplication de matrice

d'ajouter un vecteur à un autre. Exemple : $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & d \\ c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ qui fournit les équations

$\begin{cases} x_2 = a.x_1 + d.y_1 + e \\ y_2 = c.x_1 + b.y_1 + f \end{cases}$ peut se coder $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & d & e \\ c & b & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ou encore

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & d & e \\ c & b & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$ soit $I \cdot \mathbf{V}_2 = \mathbf{K}_{\text{transfert}} \cdot \mathbf{V}_1$.

Il vient alors $\mathbf{K}_{\text{transfert}}^{-1} \cdot I \cdot \mathbf{V}_2 = \mathbf{K}_{\text{transfert}}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{\text{transfert}} \cdot \mathbf{V}_1$. Au final $\mathbf{K}_{\text{transfert}}^{-1} \cdot \mathbf{V}_2 = I \cdot \mathbf{V}_1$, avec $\mathbf{K}_{\text{transfert}}^{-1}$

l'inverse de la matrice $\mathbf{K}_{\text{transfert}}$ tel que $\mathbf{K}_{\text{transfert}}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{\text{transfert}} = I$ (on rappellera que I est l'élément neutre du groupe des matrices).

Cette technique dite de *coordonnées homogènes* permet de simplifier les calculs et résolutions de systèmes en ne gardant que des produits de matrices (avec toute la rigueur mathématique associée).

Attention :

- dans la suite de cet exposé, le système d'axe choisi est $\vec{ox}$ dans le sens longitudinal de la poutre et $\vec{oy}$ verticalement (vers le haut) sur lequel sont appliqués les charges.

Un système d'axe $(\vec{ox}, \vec{oz})$ conduit à un calcul de moments produisant des termes

opposés et donc, in fine à des signes différents dans les termes des matrices.



- Le programme et les développements mathématiques ci-dessous, se limitent à un chargement vertical d'un système de poutres droites (qui répond à plus de 95% des problèmes classiques). I.E. Les efforts, déformations, mobilités sur l'axe ox et oz ne sont pas pris en compte (un appui simple est donc un appui simple avec possibilité de déplacement sur ox . Ce déplacement n'est pas considéré du fait du non traitement des actions sur cet axe.).

II Les différentes matrices :

2.1 Appuis élastique

Conditions particulières et équations de continuité de la poutre :

$$\begin{cases} y_2 = y_1 \\ R_{\text{appui/poutre}} = -k \cdot y_1 \text{ et donc} \\ \theta_2 = \theta_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K[1,1] = 1 \\ K[2,2] = 1 \end{cases}$$

Principe Fondamental de la Statique

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow -T_1 + T_2 + R_{\text{appui/poutre}} = 0 \\ \sum \vec{M} = \vec{0} \Rightarrow -M_1 + M_2 = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} T_2 = T_1 + k \cdot y_1 \\ M_2 = M_1 \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} K[4,4] = 1; K[4,1] = +k \\ K[3,3] = 1 \end{cases}$$

L'équation de moments traduit en fait le théorème des trois moments sur l'appui au raccord de la travée de gauche celle de droite.

Nous en déduisons $\mathbf{V}_2 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}_1$ avec $\mathbf{K}$ la matrice de transfert de l'appui élastique

$$\mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} y_i \\ \theta_i \\ M_i \\ T_i \\ 1 \end{bmatrix} \text{ la matrice homogène des caractéristiques à gauche et à droite de l'appui.}$$

Par identification nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \\ M_2 \\ T_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ T_1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ avec } \mathbf{K}_{\text{appui élastique}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{K}_{\text{appui élastique}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2 Appuis simple

Cette liaison particulière se déduit de l'appui élastique en affectant à k un coefficient voisin de $+\infty$ (excessivement raide !!).

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \\ M_2 \\ T_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ T_1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ avec } \mathbf{K}_{\text{appui simple}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ +\infty & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et donc } \mathbf{K}_{\text{appui simple}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\infty & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3 Encastrement élastique

$$\text{Conditions particulières et équations de continuité de la poutre : } \begin{cases} y_2 = y_1 \\ R_{\text{appui/poutre}} = -k_d \cdot y_1 \text{ et donc} \\ M_{\text{appui/poutre}} = -k_a \cdot \theta_2 \end{cases}$$

Principe Fondamental de la Statique

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow -T_1 + T_2 + R_{\text{appui/poutre}} = 0 \\ \sum \vec{M} = \vec{0} \Rightarrow -M_1 + M_2 + M_{\text{appui/poutre}} = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} T_2 = T_1 + k_d \cdot y_1 \\ M_2 = M_1 + k_a \cdot \theta_1 \end{cases} \text{ et donc}$$

$$\begin{cases} K[4,4] = 1; K[4,1] = k_d \\ K[3,3] = 1; K[3,2] = k_a \end{cases}$$

L'équation de moments traduit en fait le théorème des trois moments sur l'appui au raccord de la travée de gauche celle de droite.

Nous en déduisons $\mathbf{V}_2 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}_1$ avec $\mathbf{K}$ la matrice de transfert de l'appui élastique

$$\mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} y_i \\ \theta_i \\ M_i \\ T_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{la matrice homogène des caractéristiques à gauche et à droite de l'appui.}$$

Par identification nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \\ M_2 \\ T_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ T_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}_{\text{encastrement élastique}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_a & 1 & 0 & 0 \\ k_d & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et}$$

$$\mathbf{K}_{\text{encastrement élastique}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_a & 1 & 0 & 0 \\ -k_d & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.4 Encastrement

Cette liaison particulière se déduit de l'encastrement élastique en affectant aux k_i un coefficient voisin de $+\infty$ (excessivement raide !!).

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \\ M_2 \\ T_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ T_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}_{\text{encastrement}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\infty & 1 & 0 & 0 \\ +\infty & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et donc}$$

$$\mathbf{K}_{\text{encastrement}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\infty & 1 & 0 & 0 \\ -\infty & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.5 Rotule élastique

Conditions particulières et équations de continuité de la poutre :

Cordier Yves	Les matrices de transfert dans la résolution des poutres continues.	P 6/ 20
--------------	---	---------

$$y_2 = y_1$$

$$M_2 = k(\theta_2 - \theta_1)$$

Principe Fondamental de la Statique

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow -T_1 + T_2 = 0 \\ \sum \vec{M} = \vec{0} \Rightarrow -M_1 + M_2 = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} T_2 = T_1 \\ M_2 = M_1 \end{cases}$$

Comme $M_2 = M_1$ et $M_2 = -k(\theta_2 - \theta_1)$ il vient $\theta_2 = -\frac{1}{k}M_1 + \theta_1$ et l'équation de moments traduit en fait le théorème des trois moments sur l'appui au raccord de la travée de gauche et de droite.

Nous en déduisons $\mathbf{V}_2 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}_1$ avec $\mathbf{K}$ la matrice de transfert de la rotule élastique

$$\mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} y_i \\ \theta_i \\ M_i \\ T_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{la matrice homogène des caractéristiques à gauche et à droite de la rotule.}$$

Par identification nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \\ M_2 \\ T_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ T_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}_{\text{rotule élastique}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et donc} \quad \mathbf{K}_{\text{rotule élastique}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.6 Rotule libre

Cette liaison particulière se déduit de la rotule élastique en affectant à k un coefficient positif voisin de 0.

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \\ M_2 \\ T_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ T_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}_{\text{rotule}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et donc} \quad \mathbf{K}_{\text{rotule}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & +\infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.7 Force concentrée

Conditions particulières et équations de continuité de la poutre :

$$y_2 = y_1$$

$$\theta_2 = \theta_1$$

Principe Fondamental de la Statique

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow -T_1 + T_2 + F = 0 \\ \sum \vec{M} = \vec{0} \Rightarrow -M_1 + M_2 = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} T_2 = T_1 - F \\ M_2 = M_1 \end{cases}$$

Nous en déduisons $\mathbf{V}_2 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}_1$ avec $\mathbf{K}$ la matrice de transfert de la force concentrée

$$\mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} y_i \\ \theta_i \\ M_i \\ T_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{la matrice homogène des caractéristiques à gauche et à droite de la force.}$$

Par identification nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \\ M_2 \\ T_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ T_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}_{\text{force}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -F \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et donc} \quad \mathbf{K}_{\text{force}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & F \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.8 Moment concentré (couple)

Conditions particulières et équations de continuité de la poutre :

$$y_2 = y_1$$

$$\theta_2 = \theta_1$$

Principe Fondamental de la Statique

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow -T_1 + T_2 = 0 \\ \sum \vec{M} = \vec{0} \Rightarrow -M_1 + M_2 + C = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} T_2 = T_1 \\ M_2 = M_1 - C \end{cases}$$

Nous en déduisons $\mathbf{V}_2 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}_1$ avec $\mathbf{K}$ la matrice de transfert du couple

$$\mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} y_i \\ \theta_i \\ M_i \\ T_i \\ 1 \end{bmatrix} \text{ la matrice homogène des caractéristiques à gauche et à droite du couple.}$$

Par identification nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \\ M_2 \\ T_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ T_1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ avec } \mathbf{K}_{\text{couple}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -C \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et donc } \mathbf{K}_{\text{couple}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.9 Point libre

Conditions particulières et équations de continuité de la poutre :

$$y_2 = y_1$$

$$\theta_2 = \theta_1$$

Principe Fondamental de la Statique

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow -T_1 + T_2 = 0 \\ \sum \vec{M} = \vec{0} \Rightarrow -M_1 + M_2 = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} T_2 = T_1 \\ M_2 = M_1 \end{cases}$$

Nous en déduisons $\mathbf{V}_2 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}_1$ avec $\mathbf{K}$ la matrice de transfert du point libre

$$\mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} y_i \\ \theta_i \\ M_i \\ T_i \\ 1 \end{bmatrix} \text{ la matrice homogène des caractéristiques à gauche et à droite du point libre.}$$

Par identification nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \\ M_2 \\ T_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ T_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}_{\text{point libre}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{soit la matrice Identité.}$$

$$\text{Et, évidemment } \mathbf{K}_{\text{point libre}}^{-1} = \mathbf{K}_{\text{point libre}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.10 Dénivellation :

Conditions particulières et équations de continuité de la poutre :

$$y_2 = y_1 + d$$

$$\theta_2 = \theta_1$$

Principe Fondamental de la Statique

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow -T_1 + T_2 = 0 \\ \sum \vec{M} = \vec{0} \Rightarrow -M_1 + M_2 = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} T_2 = T_1 \\ M_2 = M_1 \end{cases}$$

Nous en déduisons $\mathbf{V}_2 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}_1$ avec $\mathbf{K}$ la matrice de transfert de la dénivellation

$$\mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} y_i \\ \theta_i \\ M_i \\ T_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{la matrice homogène des caractéristiques à gauche et à droite de la dénivellation.}$$

Par identification nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \\ M_2 \\ T_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ T_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}_{\text{deniv.}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et donc } \mathbf{K}_{\text{deniv.}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.11 Rotation :

Conditions particulières et équations de continuité de la poutre en considérant l'angle petit ne mettant

pas en cause le repère global :

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \\ \theta_2 &= \theta_1 + \alpha \end{aligned}$$

Principe Fondamental de la Statique

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow -T_1 + T_2 = 0 \\ \sum \vec{M} = \vec{0} \Rightarrow -M_1 + M_2 = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} T_2 = T_1 \\ M_2 = M_1 \end{cases}$$

Nous en déduisons $\mathbf{V}_2 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}_1$ avec $\mathbf{K}$ la matrice de transfert de l'angle

$$\mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} y_i \\ \theta_i \\ M_i \\ T_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{la matrice homogène des caractéristiques à gauche et à droite de l'angle.}$$

Par identification nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \\ M_2 \\ T_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ T_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}_{\text{angle}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et donc} \quad \mathbf{K}_{\text{angle}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

III Combinaison de points particuliers :

A partir des modèles de base ci-dessus, il est possible d'élaborer des points avec des conditions particulières.

Ex : Un appui élastique avec une dénivellation (appuis déplacé d'une valeur d) Pour un affaissement d sera négatif (dans le système de coordonnées choisi).

Un appuis élastique affaissé peut se traduire par la combinaison de points successifs (dénivellation(-d), appuis élastique, dénivellation(d)) avec $d < 0$ dans le système de coordonnées choisi. Cet appuis est

caractérisé par le produit des matrices $K_{\text{appui dénivelé (d)}} = K_{\text{deniv}(-d)} \bullet K_{\text{appui élastique}} \bullet K_{\text{deniv}(d)}$ soit

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{\text{appui élastique affaissé}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 & dk \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ Au final } \mathbf{K}_{\text{appui élastique affaissé}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 & kd \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

On notera que le produit de matrices n'est pas commutatif, il faut donc faire attention à l'ordre de calcul des différents produits.

IV Matrices des éléments de poutres

L'équilibre de l'élément poutre et les équations classiques de la RDM permettent de nous fournir les relations entre le point de départ de la poutre et le point d'arrivée. A l'identique des cas précédents, nous déterminons les matrices de transfert des éléments poutre classiques :

4.1 Poutre non chargée :

Données de la poutre :

Poutre homogène :

- de longueur l
- de section constante S
- d'inertie de section par rapport à l'axe $G, \vec{z} : I$
- de module d'élasticité E .

Principe Fondamental de la Statique :

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow -T_1 + T_2 = 0 \\ \sum \overrightarrow{M_{\text{point2}}} = \vec{0} \Rightarrow -M_1 + M_2 + T_1 \cdot l = 0 \end{cases} \text{ soit } \boxed{\begin{cases} T_2 = T_1 \\ M_2 = M_1 - T_1 \cdot l \end{cases}}$$

Calculs de Résistance des matériaux :

Moment fléchissant en un point courant d'abscisse x :

$$M_f(x) = M_1 - T_1 \cdot x$$

Equation de la déformée :

$$E \cdot I \cdot y'' = M_f \text{ avec } y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Par intégration successives on obtient :

Cordier Yves	Les matrices de transfert dans la résolution des poutres continues.	P 12/ 20
--------------	---	----------

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = \frac{1}{E \cdot I} (M_1 - T_1 \cdot x) \\ y' = \frac{1}{E \cdot I} \left(M_1 \cdot x - T_1 \frac{x^2}{2} \right) + C_1 \\ y = \frac{1}{E \cdot I} \left(M_1 \frac{x^2}{2} - T_1 \frac{x^3}{6} \right) + C_1 \cdot x + C_2 \end{cases}$$

Les conditions aux extrémités $\begin{cases} y(0) = y_1 & y(l) = y_2 \\ y'(0) = \theta_1 & y'(l) = \theta_2 \end{cases}$ permettent de conclure $\begin{cases} C_1 = \theta_1 \\ C_2 = y_1 \end{cases}$ et donc

$$\begin{cases} \theta_2 = \frac{1}{E \cdot I} \left(M_1 \cdot l - T_1 \frac{l^2}{2} \right) + \theta_1 \\ y_2 = \frac{1}{E \cdot I} \left(M_1 \frac{l^2}{2} - T_1 \frac{l^3}{6} \right) + \theta_1 \cdot l + y_1 \end{cases}$$

Nous en déduisons $\mathbf{V}_2 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}_1$ avec $\mathbf{K}$ la matrice de transfert de cette section de poutre,

$$\mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} y_i \\ \theta_i \\ M_i \\ T_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{la matrice homogène des caractéristiques aux extrémités.}$$

Par identification nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \\ M_2 \\ T_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ T_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}_{\text{poutre non chargée}} = \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2 \cdot E \cdot I} & -\frac{l^3}{6 \cdot E \cdot I} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{l}{E \cdot I} & -\frac{l^2}{2 \cdot E \cdot I} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\text{poutre non chargée}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -l & \frac{l^2}{2} E \cdot I & \frac{l^3}{6} E \cdot I & 0 \\ 0 & 1 & -l \cdot E \cdot I & -\frac{l^2}{2} E \cdot I & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.2 Poutre avec charge répartie constante (p):

Cordier Yves	Les matrices de transfert dans la résolution des poutres continues.	P 13/ 20
--------------	---	----------

Données de la poutre :

Poutre homogène :

- de longueur l
- de section constante S
- d'inertie de section par rapport à l'axe $G, \vec{z} : I$
- de module d'élasticité E .

Principe Fondamental de la Statique :

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow -T_1 + T_2 + p \cdot l = 0 \\ \sum \overrightarrow{M_{point 2}} = \vec{0} \Rightarrow -M_1 + M_2 + T_1 \cdot l - p \frac{l^2}{2} = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \boxed{\begin{cases} T_2 = T_1 - p \cdot l \\ M_2 = M_1 - T_1 \cdot l + p \frac{l^2}{2} \end{cases}}$$

Calculs de Résistance des matériaux :

Effort tranchant en un point courant d'abscisse x : $T(x) = T_1 - p \cdot x$

Moment fléchissant en un point courant d'abscisse x : $M_f(x) = M_1 - T_1 \cdot x + p \frac{x^2}{2}$

Equation de la déformée : $E \cdot I \cdot y'' = M_f$ avec $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$

Par intégration successives on obtient :

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = \frac{1}{E \cdot I} \left(M_1 - T_1 \cdot x + p \frac{x^2}{2} \right) \\ y' = \frac{1}{E \cdot I} \left(M_1 \cdot x - T_1 \frac{x^2}{2} + p \frac{x^3}{6} \right) + C_1 \\ y = \frac{1}{E \cdot I} \left(M_1 \frac{x^2}{2} - T_1 \frac{x^3}{6} + p \frac{x^4}{24} \right) + C_1 \cdot x + C_2 \end{cases}$$

Les conditions aux extrémités $\begin{cases} y(0) = y_1 & y(l) = y_2 \\ y'(0) = \theta_1 & y'(l) = \theta_2 \end{cases}$ permettent de conclure $\begin{cases} C_1 = \theta_1 \\ C_2 = y_1 \end{cases}$ et donc

$$\boxed{\begin{cases} \theta_2 = \frac{1}{E \cdot I} \left(M_1 \cdot l - T_1 \frac{l^2}{2} + p \frac{l^3}{6} \right) + \theta_1 \\ y_2 = \frac{1}{E \cdot I} \left(M_1 \frac{l^2}{2} - T_1 \frac{l^3}{6} + p \frac{l^4}{24} \right) + \theta_1 \cdot l + y_1 \end{cases}}$$

Nous en déduisons $\mathbf{V}_2 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}_1$ avec $\mathbf{K}$ la matrice de transfert de cette section de poutre,

$$\mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} y_i \\ \theta_i \\ M_i \\ T_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{la matrice homogène des caractéristiques aux extrémités.}$$

Par identification nous obtenons :

Cordier Yves	Les matrices de transfert dans la résolution des poutres continues.	P 14/ 20
--------------	---	----------

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \\ M_2 \\ T_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ T_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}_{\text{poutre chargée uniforme}} = \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2 \cdot E \cdot I} & -\frac{l^3}{6 \cdot E \cdot I} & p \frac{l^4}{24 \cdot E \cdot I} \\ 0 & 1 & \frac{l}{E \cdot I} & -\frac{l^2}{2 \cdot E \cdot I} & p \frac{l^3}{6 \cdot E \cdot I} \\ 0 & 0 & 1 & -l & p \frac{l^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -p \cdot l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\text{poutre chargée constante}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -l & 0 & -\frac{l^3}{3} E \cdot I & -\frac{5 \cdot l^4 \cdot p}{24} E \cdot I \\ 0 & 1 & -l \cdot E \cdot I & -\frac{l^2}{2} E \cdot I & -\frac{l^3 \cdot p}{6} E \cdot I \\ 0 & 0 & 1 & l & \frac{l^2 \cdot p}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & l \cdot p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.3 Poutre avec charge répartie linéairement :

$$\text{Charge : } \begin{cases} (p_1, p_2) \\ p_1 = p(x=0) \\ p_2 = p(x=l) \end{cases}$$

Données de la poutre :

Poutre homogène :

- de longueur l
- de section constante S
- d'inertie de section par rapport à l'axe $G, \vec{z} : I$
- de module d'élasticité E .

Principe Fondamental de la Statique :

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow -T_1 + T_2 + p_1 \cdot l + (p_2 - p_1) \frac{l}{2} = 0 \\ \sum \overrightarrow{M_{\text{point 2}}} = \vec{0} \Rightarrow -M_1 + M_2 + T_1 \cdot l - p_1 \frac{l^2}{2} - (p_2 - p_1) \frac{l^2}{6} = 0 \end{cases} \quad \text{soit}$$

$$\begin{cases} T_2 = T_1 - (p_1 + p_2) \frac{l}{2} \\ M_2 = M_1 - T_1 \cdot l + (2p_1 + p_2) \frac{l^2}{6} \end{cases}$$

Calculs de Résistance des matériaux :

Cordier Yves	Les matrices de transfert dans la résolution des poutres continues.	P 15/ 20
--------------	---	----------

Effort Tranchant en un point courant d'abscisse x :

$$T(x) = T_1 - p_1 x - (p_2 - p_1) \frac{x^2}{2 \cdot l}$$

Moment fléchissant en un point courant d'abscisse x :

$$M_f(x) = M_1 - T_1 \cdot x + p_1 \frac{x^2}{2} + (p_2 - p_1) \frac{x^3}{6 \cdot l}$$

Equation de la déformée :

$$E \cdot I \cdot y'' = M_f \text{ avec } y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Par intégration successives on obtient :

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = \frac{1}{E \cdot I} \left(M_1 - T_1 \cdot x + p_1 \frac{x^2}{2} + (p_2 - p_1) \frac{x^3}{6 \cdot l} \right) \\ y' = \frac{1}{E \cdot I} \left(M_1 \cdot x - T_1 \frac{x^2}{2} + p_1 \frac{x^3}{6} + (p_2 - p_1) \frac{x^4}{24 \cdot l} \right) + C_1 \\ y = \frac{1}{E \cdot I} \left(M_1 \frac{x^2}{2} - T_1 \frac{x^3}{6} + p_1 \frac{x^4}{24} + (p_2 - p_1) \frac{x^5}{120 \cdot l} \right) + C_1 \cdot x + C_2 \end{cases}$$

Les conditions aux extrémités $\begin{cases} y(0) = y_1 & y(l) = y_2 \\ y'(0) = \theta_1 & y'(l) = \theta_2 \end{cases}$ permettent de conclure $\begin{cases} C_1 = \theta_1 \\ C_2 = y_1 \end{cases}$ et donc

$$\begin{cases} \theta_2 = \frac{1}{E \cdot I} \left(M_1 \cdot l - T_1 \frac{l^2}{2} + (3 \cdot p_1 + p_2) \frac{l^3}{24} \right) + \theta_1 \\ y_2 = \frac{1}{E \cdot I} \left(M_1 \frac{l^2}{2} - T_1 \frac{l^3}{6} + (4 \cdot p_1 + p_2) \frac{l^4}{120} \right) + \theta_1 \cdot l + y_1 \end{cases}$$

Nous en déduisons $\mathbf{V}_2 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}_1$ avec $\mathbf{K}$ la matrice de transfert de cette section de poutre,

$$\mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} y_i \\ \theta_i \\ M_i \\ T_i \\ 1 \end{bmatrix} \text{ la matrice homogène des caractéristiques aux extrémités.}$$

Par identification nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \\ M_2 \\ T_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ T_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}_{\text{poutre chargée linéairement}} = \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2 \cdot E \cdot I} & -\frac{l^3}{6 \cdot E \cdot I} & (4 \cdot p_1 + p_2) \frac{l^4}{120 \cdot E \cdot I} \\ 0 & 1 & \frac{l}{E \cdot I} & -\frac{l^2}{2 \cdot E \cdot I} & (3 \cdot p_1 + p_2) \frac{l^3}{24 \cdot E \cdot I} \\ 0 & 0 & 1 & -l & (2p_1 + p_2) \frac{l^2}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -(p_1 + p_2) \frac{l}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\text{poutre chargée linéaire}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -l & 0 & -\frac{l^3}{3} E \cdot I & -\frac{l^4 \cdot (9 \cdot p_1 + 16 \cdot p_2)}{120} E \cdot I \\ 0 & 1 & -l \cdot E \cdot I & -\frac{l^2}{2} E \cdot I & -\frac{l^3 \cdot (p_1 - 3 \cdot p_2)}{24} E \cdot I \\ 0 & 0 & 1 & l & \frac{l^2 \cdot (p_1 + 2 \cdot p_2)}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{l \cdot (p_1 + p_2)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

IV Résolution d'un système de poutre continues

La résolution peut au premier abord sembler simple mais (le diable se cache dans les détails !!), numériquement, le traitement des infinis est quasi impossible. :

5.1 Principe du calcul global :

Un système de poutre peut se caractériser de manière globale par une matrice de transfert qui fait correspondre le vecteur de sortie au vecteur d'entrée. Cette matrice est obtenue par le produit successif (dans le bon sens s'il vous plaît !) des matrices de transfert des éléments constituant la poutre

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \\ M_2 \\ T_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_{\text{globale}} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ T_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}_{\text{globale}} = \left(K_{\text{extreme droite}} \bullet \dots \bullet K_{2^{\text{eme}}} \bullet K_{\text{premier à gauche}} \right) = \prod_{\substack{\text{premier} \\ \text{à gauche} \\ \text{dernier} \\ \text{à droite}}} K_{\text{elements}}. \quad \text{Les matrices}$$

contenant des infinis sont remplacées par un équivalent numérique dans lesquels l'infini est représenté par un très grand nombre au regard des caractéristiques globales du problème. L'évaluation de ce grand nombre est théoriquement un problème, mais souvenons nous que déjà le modèle de la poutre suivant le principe de « saint venant » n'est que rarement respecté au voisinage des appuis. Le résultat numérique fourni doit donc se confronter au bon sens du mécanicien qui doit valider ou invalider les résultats. En effet, une rotation de section de plusieurs radians ou une flèche calculée de l'ordre de la longueur de la poutre doivent nous amener à remettre en cause le modèle de calcul !.

Ce système produit 4 équations mais possède 8 inconnues. Il convient donc de le compléter par les caractéristiques connues aux extrémités qui sont en règle générale de 2 conditions par extrémités.

Point libre : $M=0$; $T=0$

Appuis simple : $y=0$; $M=0$

Encastrement : $y=0$; $\theta=0$

Dans les deux dernier cas d'appuis aux extrémités, nous réduirons l'étude à la poutre moins les points d'extrémités et nous introduirons les conditions particulières au vecteur d'entrée du deuxième élément et au vecteur de sortie de l'avant dernier élément.

$$\text{Le système avec les conditions d'entrée } [V_1]_{5 \times 1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ T_1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et de sortie } [V_2]_{5 \times 1} = \begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \\ M_2 \\ T_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ se résout par le}$$

système matriciel 10 équations 10 inconnues.

$$\begin{bmatrix} [0]_{5 \times 1} \\ [0]_{2 \times 1} \\ [0]_{2 \times 1} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{globale}]_{5 \times 5} & [-I]_{5 \times 5} \\ [Cond 1]_{2 \times 5} & [0]_{2 \times 5} \\ [0]_{2 \times 5} & [Cond 2]_{2 \times 5} \\ [Uh]_{1 \times 5} & [Uh]_{1 \times 5} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} [V_1]_{5 \times 1} \\ [V_2]_{5 \times 1} \end{bmatrix} \text{ avec } Uh = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

Les matrices $[Cond]_{2 \times 5}$ sont dans les différents cas :

$$\text{Appuis simple : } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Encastrement : } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Point libre : } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il reste alors à traiter les vecteurs d'extrémités de poutre suivant les cas de type d'extrémités (s'ils ont été omis dans la matrice globale).

Les inconnues réelles sont en fait au nombre de 8, les coefficients 1 dues aux matrices homogènes des vecteurs d'extrémités sont connus par défaut. Il est possible de réduire le système à un système 9x9 en éliminant l'équation qui résout le coefficient 1 de $[V_2]$. Cet artifice informatique permet de réduire le temps calcul et le volume de mémoire utilisé.

En fait dans ce système de résolution seul le vecteur d'entrée nous intéresse, le vecteur de sortie sera calculé par la méthode de proche en proche qui suit.

Cordier Yves	Les matrices de transfert dans la résolution des poutres continues.	P 18/ 20
--------------	---	----------

5.1 Résolution de proche en proche :

A partir du vecteur d'entrée $[V_1]_{5 \times 1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ M_1 \\ T_1 \\ 1 \end{bmatrix}$ nous calculons le vecteur de sortie du premier élément

$V_2 = K_{\text{element}} \cdot V_1$ qui deviendra le vecteur d'entrée du deuxième élément et permettra de calculer le vecteur de sortie du deuxième élément et ...

5.3 Traitement des éléments poutre :

Nous pourrions continuer le système en calculant les caractéristiques en un point quelconque de la poutre en effectuant le produit $V_{\text{courant}} = K_{\text{courant}} \cdot V_1$ avec K_{courant} la matrice de transfert d'une poutre réduite à une longueur ($x < l$).

Cette méthode nécessite beaucoup de calculs pour tous les points intermédiaires, et, ne nous fournit pas directement les contraintes. Il est donc préférable de traiter les poutres de manière globale en déterminant les équations des courbes et pré calculant les coefficients en fonction des caractéristiques mécaniques et dimensionnelles des sections.

T : polynôme de degré 2 : $T(x) = T_1 - p_1 \cdot x - \frac{(p_2 - p_1)}{2 \cdot l} \cdot x^2$ ou x représente l'abscisse local.

M_f : polynôme de degré 3 obtenu par intégration formelle de T : $M_f(x) = M_1 - \text{integ}(T(x))$

θ : polynôme de degré 4 obtenu par intégration formelle de M_f : $\theta_f(x) = \theta_1 + \text{integ}(M_f(x)) \cdot \frac{1}{E \cdot I}$

y : polynôme de degré 5 obtenu par intégration formelle de θ : $y(x) = y_1 + \text{integ}(\theta(x))$

σ : polynôme de degré 3 obtenu par multiplication formelle de M_f : $\sigma(x) = \frac{M_f(x)}{\frac{I}{v}}$

τ : polynôme de degré 2 obtenu par multiplication formelle de T : $\tau(x) = \frac{T(x) \cdot M_{\text{statique}}}{b \cdot I}$

La fonction formelle $\text{integ}()$ crée un polynôme de degré supérieur avec un coefficient constant nul.

pour un monôme : $\text{integ}(A \cdot x^n) = \frac{A}{n+1} \cdot x^{n+1}$. L'intégration du polynôme passe par la somme de l'intégration des monômes.

Bibliographie :

- « **Les matrices. Transfert dans le calcul des structures-** **Pierre Marie Gery, Jean Armand Calgaro** » *Auteur :Pierre Marie Gery, Jean Armand Calgaro Editeur :Eyrolles Année : 1973*
- « **Structures élastiques composées de poutre** » *Auteur : Jean Courbon Editeur Techniques de l'Ingénieur, traité Construction*
- **Programme « Poutre »** *Auteur : Yves Cordier Editeur Freeware Année 1987*

Cordier Yves	Les matrices de transfert dans la résolution des poutres continues.	P 20/ 20
--------------	---	----------